

© Д.А. САМОЛОВОВ, А.С. ГУБКИН

*Тюменский государственный университет*  
*RL2000@rambler.ru, alexshtil@gmail.com*

УДК 532.5.011

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ МЕТОДА  
РЕШЕТОЧНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА**

**COMPUTATIONAL CAPABILITIES  
OF THE LATTICE BOLTZMANN METHOD**

*АННОТАЦИЯ. Зависимость коэффициента сопротивления тела потоку жидкости при одноосном растяжении каплевидного тела немонотонна. Это одна из причин сложности решения обратных задач гидродинамики. Эффективного алгоритма решения обратных задач в настоящий момент не существует. Анализ уравнений гидродинамики и численных схем не позволяет выделить однозначной связи между входными и выходными параметрами обтекания тела. Необходим поиск принципиально более простых методов решения задач гидродинамики. В работе анализируются современные методы классической гидродинамики, а также один из численных методов статистической гидродинамики — метод решеточного уравнения Больцмана. Методом решеточного уравнения Больцмана решена задача обтекания плоской пластины. Проведено качественное и количественное сравнение результатов с натурным экспериментом и с численным решением методом конечных объемов. Расчетная последовательность изменения картины течения и безразмерные времена процесса находятся в согласии с реальным экспериментом по обтеканию плоской пластины.*

*SUMMARY. The dependence of body drag coefficient on a fluid current at uniaxial tension of a drop shaped body is not steady. It is one of the reasons of the complexity of hydrodynamics inverse problem solution. There is not effective algorithm of inverse problem solving at the present moment. Hydrodynamics equations and numerical schemes analysis does not allow to find a simple dependency between in and out parameters of the flow around body. It is necessary to find essentially more simple methods to solve hydrodynamics problems. Numerical methods of classical hydrodynamics and statistical method — lattice Boltzmann method (LBM) — are considered. Flow pattern around flat plate is calculated with LBM. Qualitative and quantitative comparisons of the results with natural experiment and numerical solution by finite volume method have been carried out. Calculated consecution of flow patterns and dimensionless times are in agreement with the natural experiment results.*

*КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Метод решеточного уравнения Больцмана, обтекание плоской пластины, численные методы гидродинамики, пятимоментная гидродинамика.*

*KEY WORDS. Lattice Boltzmann method, flow around flat plate, numerical methods of hydrodynamics, fifth-moment hydrodynamics.*

**Введение.** Уровень понимания процессов течения вязкой жидкости не позволяет получить аналитические формулы, достаточные для решения прикладных задач. Поэтому для инженерных расчетов используются решения модельных нефундаментальных уравнений, например, уравнений моделей турбулентности. Инженерные методики решения практических задач в основном решают прямые задачи, в то время как при проектировании технических устройств необходимо решать обратные задачи.

Решать обратные задачи можно получать разными путями — накапливая опыт и рассматривая математическое описание процессов. Во втором случае положительный результат возможен в том случае, если существует возможность выделить прозрачную и однозначную связь между входными и выходными параметрами. Так, при обтекании каплевидного тела с малыми числами Рейнольдса и Маха (по крайней мере, при  $Re < 10$  и  $M < 0.1$ ) картина течения ламинарна, так как в уравнении Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v} \quad (1)$$

можно пренебречь слагаемым, содержащим вязкость, и (1) в данном приближении принимает вид уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p \quad (2)$$

При этом закономерности изменения картины течения вокруг каплевидного тела очевидны: при увеличении площади поперечного сечения тела трубки тока будут поджиматься сильнее, что приведет к возрастанию градиентов скорости и росту силы сопротивления движению. Очевидно, для уменьшения силы сопротивления достаточно уменьшить площадь поперечного сечения тела.

При увеличении числа Рейнольдса с тыльной стороны обтекаемого тела возникает пара вихрей, далее вихревая дорожка Кармана [1], потом структурированность течения исчезает, образуется турбулентный след и т.д. Для каплевидного тела темп роста зоны отрыва потока с увеличением числа Рейнольдса в значительной степени зависит от отношения максимального диаметра тела к его длине (рис. 1).

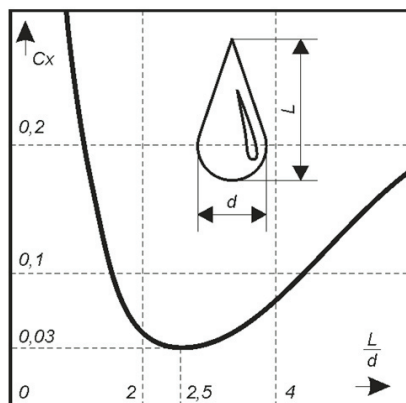


Рис. 1. Зависимость коэффициента аэродинамического сопротивления  $C_x$  от относительного диаметра каплевидного тела

При малой относительной толщине тела зона отрыва потока распространяется почти на всю длину, как при обтекании плоской пластины. При увеличении относительной толщины тела зона отрыва меньше, однако скорости движения жидкости в ней больше, проекции нормальных напряжений на ось тела больше. Таким образом, выделить прозрачную количественную связь между входными параметрами (геометрия тела) и выходными (сила сопротивления движению) в данной задаче не удастся. При усложнении геометрии задачи связь выходных параметров со входными может оказаться еще более немонотонной.

Для принятия решения о том, каким образом изменять геометрию тел для получения характеристик, близких к желаемым, необходимо глубокое понимание сценария, по которому происходит срыв ламинарной картины обтекания тела. В общем случае анализ системы уравнений Навье-Стокса не дает явных путей для решения оптимизационных задач, в особенности для сложных геометрий и больших чисел Рейнольдса. Для формирования понятий о сценариях срыва ламинарного течения и перехода к турбулентному обтеканию необходимо экспериментальное изучение данного явления. Возможен как натурный, так и численный эксперимент. В натурном эксперименте не всегда возможно измерение макропараметров с требуемым уровнем разрешающей способности. В то время как основные процессы, способствующие разрушению ламинарной устойчивости, происходят в пограничном слое, толщина которого, например, для плоской пластины:

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu L}{u}}, \quad (3)$$

где  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $L$  — характерный размер,  $u$  — скорость невозмущенного набегающего потока. Для ламинарного обтекания плоской пластины коэффициент пропорциональности равен 5. Оценки показывают, что при обтекании потоком воздуха ( $\nu = 15.2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ) со скоростью 10 м/с плоской пластины шириной 10 см толщина пограничного слоя равна ~2мм, то есть замер основных макропараметров может быть затруднен.

Учитывая то, что замерной инструмент не должен вносить изменений в поле скоростей обтекания, количественные измерения в натуральных экспериментах могут быть затруднены. При проведении экспериментов в аэродинамических трубах обычно на поверхности исследуемого тела закрепляют тонкие легкие нити, по характеру колебания которых получают качественные данные о картине течения.

**Современные методики решения задач обтекания тел.** Численный эксперимент позволяет получать количественные поля скоростей, давлений и температур с разрешением, ограниченным только мощностью вычислительной платформы. На сегодняшний день существуют три подхода к моделированию течения жидкости и газа. Наиболее распространенными из них являются методы конечных разностей, конечных объемов и конечных элементов [2-4].

Общей особенностью обоих вышеприведенных методов является то, что с точки зрения вычислений решение гидродинамической задачи сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений на каждом временном

шаге расчета. Это процесс, требующий больших затрат машинного времени. Скорость обработки каждого временного шага может сильно зависеть от множества входных параметров. Другими словами, решается задача поискового характера. Кроме того, для расчета давления при известных компонентах скорости требуется решение уравнения типа уравнения Пуассона:

$$\Delta p = -\nu_i \nu_j \quad (4)$$

Также при больших числах Рейнольдса приходится пользоваться введением в систему дополнительных уравнений, составляющих так называемую модель турбулентности. На сегодняшний день существует несколько моделей турбулентности [5], большинство из которых является полуэмпирическими, то есть сочетают в себе фундаментальные уравнения и модельные представления авторов. Успешность этих моделей в промышленных расчетах обусловлена тем, что корректировки моделей выполнялись по результатам сравнения расчетных и экспериментальных параметров. Однако введение в теорию каких-либо эмпирических зависимостей скрывает от исследователей тонкости развития турбулентных сценариев.

Существует еще один способ получения решений для турбулентных течений — прямое численное моделирование (DNS). Он заключается в прямом решении системы уравнений Навье-Стокса без применения моделей турбулентности, однако требует очень мелких шагов по времени и очень мелкой сетки. Результаты, получаемые при решении уравнений этим методом, используются в качестве эталонов при моделировании течений на крупных сетках.

Методики расчета турбулентных течений, использующие в качестве ядра вычислений систему уравнений Навье-Стокса с введенными моделями турбулентности, оперируют детерминированными уравнениями эволюции физических макроскопических полей — скорости, давления, температуры. Стоит отметить, что процессы переноса массы и тепла описываются при этом различными, вычислительно разделенными уравнениями.

**Решеточное уравнение Больцмана.** Возможен статистический подход к описанию процессов гидродинамики, одной из численных схем реализации такого подхода является модель решеточного уравнения Больцмана (LBE — Lattice Boltzmann Equation) [6]. Данная модель является дискретной реализацией идеологии стохастической пятимоментной гидродинамики. Кратко изложим основные принципы этой теории.

Состояние системы описывается функцией распределения  $f$ , физический смысл которой — плотность вероятности числа частиц в единице объема. Эволюция функции распределения описывается кинетическим уравнением Больцмана:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{F}{m} \frac{\partial f}{\partial v_i} = \Omega_{st} \quad (5)$$

Здесь  $\Omega_{st}$  — интеграл столкновений, описывающий скорость изменения функции распределения за счет столкновений частиц. Для двухчастичных столкновений он имеет вид [7]:

$$\Omega_{st} = \int |v - v_1| (f' f'_1 - f f_1) d\sigma d\vec{v}_1 \quad (6)$$

Можно показать, что уравнения гидродинамики следуют из уравнения (5) [6]. Макроскопические параметры среды — плотность, скорость макроскопического движения, тензор напряжений, температура, — являются соответствующими моментами функции распределения [6].

Отметим одну отличительную особенность статистического подхода: процессы переноса массы и тепла по-прежнему описываются одной величиной — функцией распределения. Для учета транспорта тепла в систему уравнений классической гидродинамики требуется введение дополнительных уравнений переноса тепла, т.е. кинетическое уравнение Больцмана (далее — КУБ) описывает транспорт массы и тепла в более общем виде — как следствие молекулярных токов, а не макроток элементов объема сплошной среды.

В методе решеточных уравнений Больцмана область решения задачи представляется в виде решетки, в узлах которой определяется функция распределения. Также производится ее дискретизация по направлениям — вводятся так называемые скоростные каналы. Функция распределения конкретного скоростного канала описывает вероятность движения квазичастиц среды в данной точке в направлении скоростного канала в данный момент времени. Для решеток, используемых в методе решеточных КУБ, приняты стандартные обозначения:  $D_x Q_y$ , где  $x$  — число пространственных измерений решетки,  $y$  — число скоростных каналов (рисунок 2). При этом полагается, что за единичное время квазичастица достигает соседнего узла решетки.

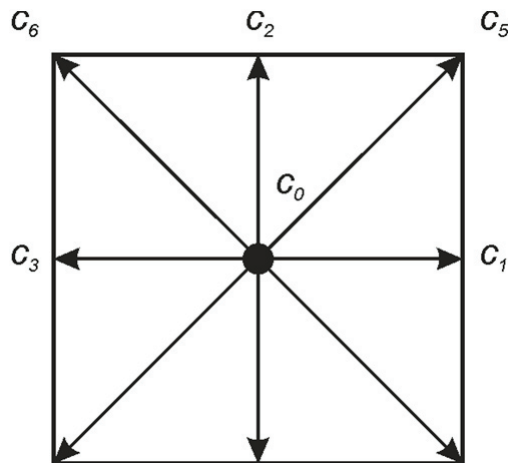


Рис. 2. Схематическое изображение решетки D2Q9

Расчетная итерация модели решеточного КУБ проводится по следующему правилу, получаемому при дискретизации КУБ:

$$f_i(\vec{r} + \vec{c}_i, t+1) = f_i(\vec{r}, t) + \Omega_i \quad (7)$$

Здесь  $\Omega_i$  — дискретизованный по направлению интеграл столкновений, который в приближении времени релаксации имеет вид:

$$\Omega_i = -\frac{1}{\tau} (f_i(\vec{r}, t) - \bar{f}_i(\vec{r}, t)) \quad (8)$$

Показано [6], что время релаксации связано с кинематической вязкостью следующим соотношением:

$$\nu = \frac{1}{3} \left( \tau - \frac{1}{2} \right) \quad (9)$$

В качестве локально-равновесного распределения  $\bar{f}_i$  используется следующая функция [6], имеющая вид распределения Максвелла:

$$\bar{f}_i = \omega_i \rho \left( 1 + 3(\bar{c}_i, \bar{u}) + \frac{9}{2}(\bar{c}_i, \bar{u})^2 - \frac{3}{2}u^2 \right) \quad (10)$$

Коэффициенты  $\omega_i$  зависят от типа решетки. В данной работе при модельных расчетах использована решетка D2Q9, для которой коэффициенты принимают следующие значения:

$$\omega_0 = \frac{4}{9} \quad \omega_{1,3,5,7} = \frac{1}{9} \quad \omega_{2,4,6,8} = \frac{1}{36} \quad (11)$$

После каждой расчетной итерации по схеме (7) производится обработка граничных условий. Граничные условия в методе решеточных КУБ задаются следующим образом: условие прилипания — разворотом функции распределения на 180 градусов, условие проскальзывания — зеркальным отражением функции распределения, заданное значение скорости и плотности — поддержанием функции распределения в равновесном состоянии (10).

В [8] отмечается, что концептуальная и практическая простота метода решеточного уравнения Больцмана — основа вычислительной эффективности данного метода. Также в [8] отмечаются некоторые наиболее важные особенности данной численной схемы:

— во-первых, отсутствие нелинейного члена благодаря распространению импульса вдоль жестко зафиксированных перед началом расчета скоростных каналов решетки;

— во-вторых, граничные условия формулируются в виде простых механистических правил;

— в-третьих, расчет давления и тензора напряжений не требуют решения уравнения Пуассона (4);

— в-четвертых, хорошие возможности для распараллеливания процесса расчета.

В данной работе исследовалась возможность возникновения качественных изменений картины течения в двумерных моделях решеточного КУБ при росте числа Рейнольдса при решении двумерной задачи об обтекании плоской пластины.

**Результаты расчетов обтекания плоской пластины.** Рассчитывалось поле скоростей при течении жидкости в двумерном канале с параллельными стенками и препятствием, расположенным поперек течения, как изображено на рис. 3. На входном и выходном срезе канала задавалась постоянная скорость движения потока жидкости, на стенках канала и сторонах пластины — условия прилипания. Число Рейнольдса (характерный размер — ширина пластины)  $Re=160$ . Моделировался импульсный старт движения жидкости из состояния покоя.

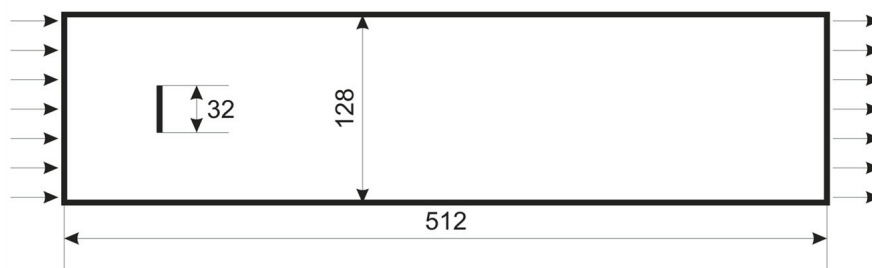


Рис. 3. Геометрия расчетной области. Размеры указаны в относительных единицах расстояний между узлами решетки

При расчетах наблюдалась временная картина распространения плотности частиц. Распределение плотности частиц в различные моменты безразмерного времени  $t_D = v_\infty/d$  представлено на рис. 4, 5 (темный цвет соответствует максимальной плотности, светлый — минимальной). Важно, что вид распределений и последовательность их смены характерны для натурального эксперимента, описанного в [9]. В частности, при  $t_D = 1$  наблюдается пара вихрей за пластиной, при  $t_D \gg 1$  — отрыв вихрей и образование периодической структуры — вихревой дорожки Кармана.



Рис. 4. Распределение плотности частиц,  $t_D = 0.98$

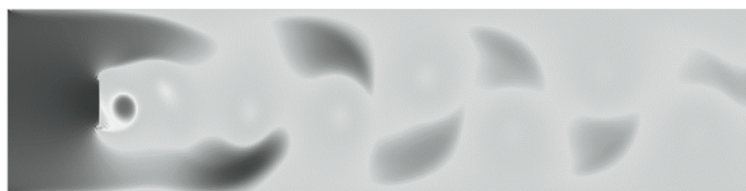


Рис. 5. Распределение плотности частиц,  $t_D = 24.8$

Стоит отметить, что крайне важным с точки зрения соответствия теоретического описания расчетного аппарата метода решеточных уравнений Больцмана и практических наблюдений является возникновение стабильно меняющейся структуры — вихревой дорожки Кармана, — на последних стадиях расчетного процесса. На наш взгляд, отражение моделью реальных качественных фактов — одна из причин, по которым возможно изучение закономерностей срыва ламинарных течений и развития турбулентных структур.

Также проведен ряд численных экспериментов с разными числами Рейнольдса, в результате которых установлено, что возникновение вихревой дорожки Кармана происходит при  $Re \approx 45$ . В [10] говорится о том, что вихревая дорожка Кармана возникает при  $Re > 40$ . Таким образом, наблюдается хорошее согласие расчетных и экспериментальных результатов.

При решении данной задачи методом МКО вихревая дорожка Кармана возникает при  $Re \approx 40$ . Однако получаемая методом МКО вихревая дорожка Кармана несколько отличается от получаемой по методу решеточного кинетического уравнения Больцмана (рис. 6).

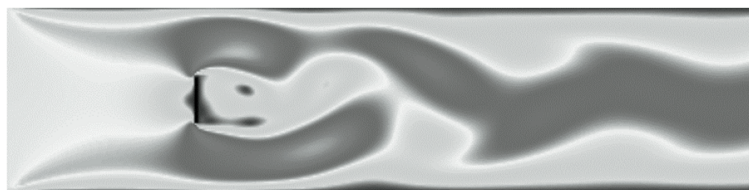


Рис. 6. Картина течения при моделировании вихревой дорожки Кармана методом МКО,  $Re = 160$ ,  $t_D \gg 1$

Кроме того, при проведении численного эксперимента с помощью решения уравнения Навье-Стокса методом конечных объемов образование вихревой дорожки происходит только после внесения во входной профиль скоростей малого синусоидального по вертикальной координате возмущения. Без внесения этого возмущения при  $Re < 5000$  за пластиной образовывалась только пара вихрей (как на рис. 5) при  $t_D \gg 1$ .

**Заключение.** Использование модели решеточных уравнений Больцмана дает следующие вычислительные преимущества по сравнению с моделью сплошной среды: на каждом временном шаге не требуется решения системы алгебраических уравнений; для расчета давления не требуется решения уравнения Пуассона; возможно высокоэффективное распараллеливание процесса вычислений.

Модель решеточных уравнений Больцмана отражает качественные факты, присущие натурным экспериментам — сценарий вихреобразования за плоской пластиной.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Karman, T., von. Aerodynamics. McGraw-Hill, 1963.
2. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984.
3. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986.
4. Петрусев А.С. Использование сеточных методов для решения задач механики сплошной среды. М.: Изд-во МФТИ, 2004.
5. Фрик П.Г. Турбулентность: модели и подходы. Часть I. Пермь, 1998.
6. Wolf-Gladrow, D. A. Lattice-gas cellular automata and Lattice-Boltzmann models. Springer, 2000.
7. Квасников И.А. Термодинамика и статистическая физика. М.: Едиториал УРСС, 2003.
8. Succi, S. The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond. Oxford: University Press, 2001.
9. Taneda, S. Visual Study of unsteady separated flows around bodies // Progress in Aerospace Science. 1977. V. 17. P. 287-348.
10. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Выпуск 7. Физика сплошных сред. М.: Мир, 1986.



## REFERENCES

1. Karman, T. von. Aerodynamics. McGraw-Hill, 1963.
2. Patankar, S. *Chislennyye metody resheniya zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti* [Numerical heat transfer and fluid flow]. Moscow, 1984.
3. Zenkevich, O., Morgan, K. *Konechnyye elementy i approksimatsiya* [Finite elements and approximation]. Moscow, 1986. (in Russian).
4. Petrusev, A.S. *Ispol'zovanie setochnykh metodov dlia resheniya zadach mekhaniki sploshnoi sredy* [Usage of grid methods to solve the problems in continuum mechanics]. Moscow, 2004. (in Russian).
5. Frik, P.G. *Turbulentnost': modeli i podkhody. Chast' I* [Turbulence: models and approaches. Part I]. Perm, 1998. (in Russian).
6. Wolf-Gladrow, D. A. Lattice-gas cellular automata and Lattice-Boltzmann models. Springer, 2000.
7. Kvasnikov, I.A. *Termodinamika i statisticheskaya fizika* [Thermodynamics and statistical physics]. Moscow, 2003. (in Russian).
8. Succi, S. The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond. Oxford: University Press, 2001.
9. Taneda, S. Visual Study of unsteady separated flows around bodies. *Progress in Aerospace Science*. 1977. V. 17. P. 287-348.
10. Feinman, R., Leiton, R., Sands, M. *Feinmanovskie lektsii po fizike. Vypusk 7. Fizika sploshnykh sred* [Feynman lectures on physics. Continuous medium physics. Issue 7]. Moscow, 1986. (in Russian).

## Авторы публикации

**Самолов Дмитрий Алексеевич** — аспирант Института физики и химии Тюменского государственного университета

**Губкин Алексей Сергеевич** — аспирант Института физики и химии Тюменского государственного университета

## Authors of the publication

**Dmitry A. Samolovov** — Post-graduate student, Institute of Physics and Chemistry, Tyumen State University

**Alexey S. Gubkin** — Post-graduate student, Institute of Physics and Chemistry, Tyumen State University